

# FysA230/1 Elektronien diffraktio

Assistentti:

Arvostellaan

Työ jätetty:

## **Abstract**

When an electron gun shoots electrons through a lattice, they diffract. After that electrons hit to the phosphorescent screen, where we can measure diffraction circles' diameters and calculate the diffraction angles with them. Wavelength can be calculated by using accelerate voltage. The lattice constant can be estimated by making linear fit to the graph or calculate the lattice constant for every single diameter and accelerate voltage value, and finally calculate the average lattice constant. By using linear fitting for graph the results were  $d_s = 2,183 \cdot 10^{-10}$  m for the smaller and  $d_u = 1,197 \cdot 10^{-10}$  m for the larger circle. Calculating an average value for the lattice constant with every single value of accelerate voltage and diameters of circles the results were  $d_s = (2,134 \pm 0,015) \cdot 10^{-10}$  m for the smaller circle and  $d_u = (1,205 \pm 0,0015) \cdot 10^{-10}$  m for the larger circle.

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Teoreettiset lähtökohdat</b>	<b>3</b>
2.1	Aallonpituuden määrittäminen . . . . .	3
2.2	Taipumiskulman määrittäminen . . . . .	4
2.3	Hilavakio . . . . .	4
2.4	Virhe . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Mittauslaitteisto ja kokeelliset menetelmät</b>	<b>5</b>
3.1	Laitteisto . . . . .	5
3.2	Mittaukset . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Havainnot ja laskut</b>	<b>6</b>
4.1	Hilavakion määrittäminen graafisesti . . . . .	7
4.2	Hilavakion määrittäminen laskennallisesti . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Johtopäätökset</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Liitteet</b>	<b>12</b>

# 1 Johdanto

Aineen aaltoluonteen hypoteesin teki ensimmäisen kerran de Broglie väitöskirjassaan vuonna 1924, kun taas elektronien aaltoluonne todistettiin kokeellisesti vuonna 1927 Davisonin ja Germerin tehdessä sirontakokeita nikkelin pinnasta. Aaltoluonteisina hiukkasiina elektroneilla on taipumus muuttaa aallonpituuttaan ja etenemissuuntaa, kun ne menevät jonkin kappaleen raon tai hilan läpi. Tätä ilmiötä kutsutaan elektronin diffraktioksi [1, sivu 1493]. Lävistettyään kohtion hiukkasten aallot summautuvat: ne joko vahvistavat tai heikentävät toisiaan. Tämä ilmiö nähdään, kun hiukkaset törmäävät lopulta varjostimelle, josta voidaan selvästi erottaa interferenssikuvioita.

## 2 Teoreettiset lähtökohdat

### 2.1 Aallonpituuden määrittäminen

Suhteellisuusteoreettinen kokonaisenergia on muotoa

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2, \quad (1)$$

missä  $p$  on liikemäärä,  $c$  valonnopeus ja  $E_0$  massallisen hiukkasen lepoenergia. Tämä lepoenergia voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$E_0 = mc^2. \quad (2)$$

Kun kiihdytysjännite  $U$  antaa elektronille liike-energian  $eU$ , saadaan laskettua elektronien kokonaisenergia kaavalla

$$E = eU + mc^2, \quad (3)$$

joka voidaan neliöidä ja saadaan välivaiheet

$$\begin{aligned} E^2 &= (eU)^2 + 2eUmc^2 + E_0^2 \\ p^2c^2 &= (eU)^2 + 2eUmc^2, \end{aligned}$$

joista tulee liikemääräksi

$$p = \sqrt{\left(\frac{eU}{c}\right)^2 + 2eUm}, \quad (4)$$

missä elektronin massa  $m = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg, valonnopeus  $299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ja elektronin varaus  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C. De Broglien yhtälö on muotoa

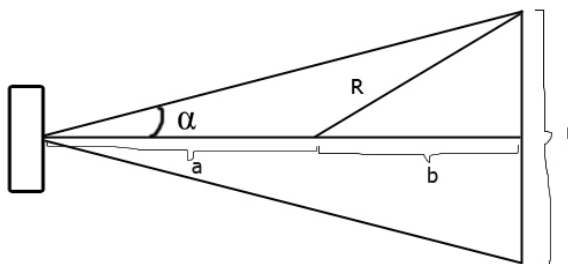
$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (5)$$

missä Plancin vakio  $h \approx 6,62607 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{s}}$  ja  $\lambda$  on aallonpituus. Sijoitetaan yhtälö 4 de Broglien yhtälöön, niin saadaan elektronin aallonpituudeksi

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{eU}{c}\right)^2 + 2eUm}}. \quad (6)$$

## 2.2 Taipumiskulman määrittäminen

Kuvassa 1 esitellään elektronin taipuminen, kun se läpäisee kohtion.  $R$  on pallon säde ja  $r$  on varjostimelle tulleen renkaan halkaisija.



Kuva 1: Elektronin taipuminen kohtiassa

Nyt siis Pythagoraan lauseella saadaan arvo pituudelle  $b$

$$b = \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{2}}. \quad (7)$$

Trigonometriaa käyttäen saadaan laskettua taipumiskulma  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\frac{1}{2}r}{a+b} \\ \Rightarrow \alpha &= \arctan\left(\frac{r}{2(a+b)}\right) = \arctan\left(\frac{r}{2(a + \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}})}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

## 2.3 Hilavakio

Elektronin siroaminen hilasta noudattaa Braggin lakia

$$2d \sin(\theta) = n\lambda, \quad (9)$$

missä  $\theta$  on elektronien tulo- ja heijastuskulma hilassa, joten elektronien taipumiskulma on  $\alpha = 2\theta$ . Hilavakio (heijastustasojen välimatka)  $d$  saadaan siis yhtälöllä

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin(\frac{1}{2}\alpha)} = \frac{nh}{2 \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{r}{2(a + \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}})}\right)\right) \sqrt{\left(\frac{eU}{c}\right)^2 + 2eUm}}. \quad (10)$$

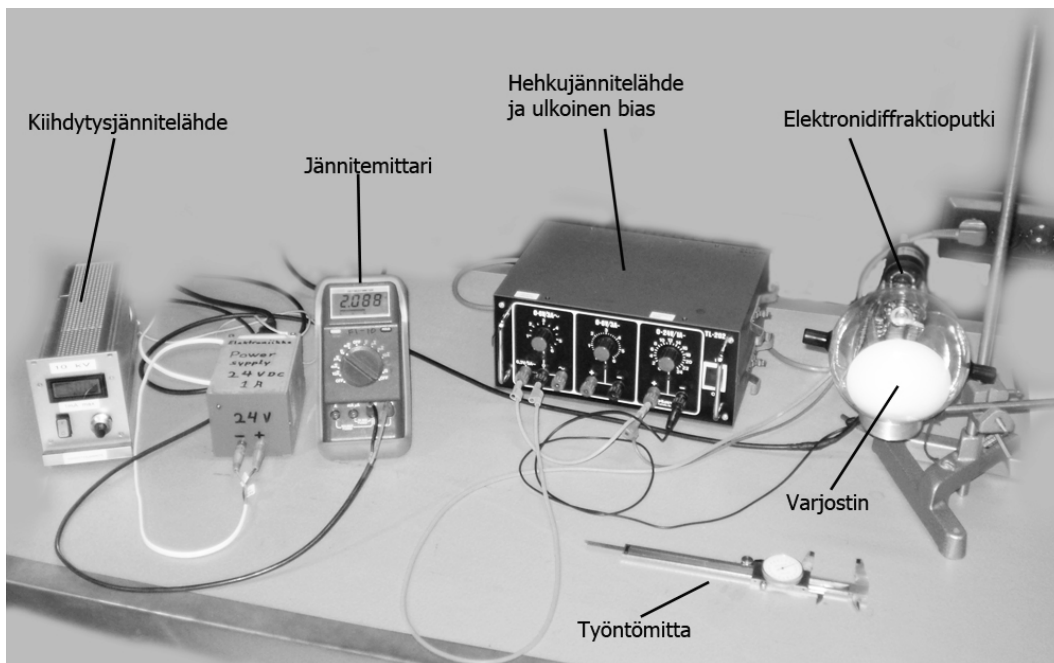
## 2.4 Virhe

Virheet lasken yleisellä virheenetenemisyyhtälöllä

$$\delta f = \sqrt{\sum_I \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i\right)^2}. \quad (11)$$

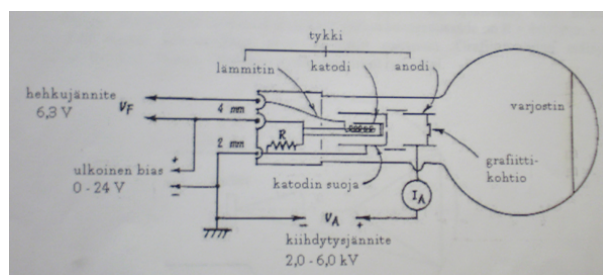
### 3 Mittauslaitteisto ja kokeelliset menetelmät

#### 3.1 Laitteisto



Kuva 2: Koelaitteisto

Työssä käytetty laitteisto on kuvassa 2. Elektronidiffraktioputki (Teltr, 2004-00136, YFL305) oli valmiiksi kytketty kiihdytysjännitelähteeseen (10 kV, 1 mA max) ja toiseen jännitelähteeseen (Otava, opetuvälineosasto, TL-202), josta saa sekä hehkujännitteen että elektronisuihkun intensiteettiä muuttavaan bias-jännitteeseen. Finest 387 MULTIMETER (FI-10)-jännitemittari mittasi korkeajännitelähteen jännitettä.



Kuva 3: Elektronidiffraktioputki

Kuvassa 3 on esitelty elektronidiffraktioputken rakenne ja kytkennät jännitelähteisiin. Putken sisällä on elektronitykki, joka koostuu hehkulangalla lämmitettävästä katodista. Lämmitys aiheuttaa katodissa sen, että se alkaa emittoida elektroneita. Katodia ympäröi suojakuppi, jossa elektronit kokevat bias-jännitteen, mikä rajoittaa elektronien pääsemistä anodille. Ne elektronit, jotka pääsevät kupista ulos, kiihdytetään katodin ja anodin välissä olevassa tilassa kiihdytysjännitteellä. Lopulta elektronit osuvat kohtiona toimivalle nikkeliverkolle höyrystetylle ohuelle grafiittikalvolle. Elektronien lävistäessä kohtio suihku hajaantuu siten, että se muodostaa varjostimelle renkaita. Renkaiden sisä- ja ulkosäteet mitattiin työntömitalla (DIAL CALIPER).

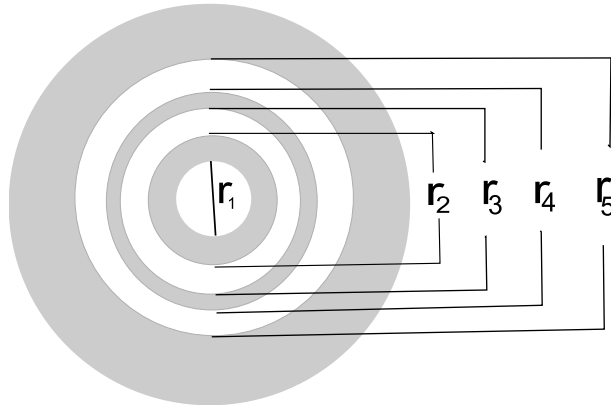
## 3.2 Mittaukset

Mittaukset oli tehtävä pimeässä tai ainakin hämärässä, sillä silloin varjostimelle tulevat kuviot näkyivät selkeiten. Mittasin varjostimelle muodostuvien renkaiden halkaisijoita kiihdytysjännitteen funktiona. Nostin kiihdytysjännitettä 2 kV:sta 6 kV:tiin puolen kV:n välein. Bias-jännite oli aluksi nolla, sillä muutoin varjostimen kuvasta olisi tullut liian tumma eivätkä renkaat olisi erottuneet kunnolla. Muutaman viimeisen mittauksen aikana nostin bias-jännitettä suuremmaksi niin, ettei varjostimen taustan liiallinen valoisuus enää häirinnyt itse valorenkaiden mittaamista. Varjostimelta oli jokaisessa mittauskohdassa erotettavissa kolme eri rengasta.

Toisessa mittauksessa oli tarkoitus pitää kiihdytysjännitettä arvossa 6 kV ja laskea sekä mitata kaikki varjostimella näkyvät renkaat. Kolmen selkeän renkaan lisäksi näkyi vain yksi hyvin himmeä rengas uloimpana. Se oli niin himmeä, että oli hankaluuksia edes mitata sitä kovinkaan tarkasti.

## 4 Havainnot ja laskut

Liitteestä 1 löytyvät mittamaani renkaiden sisä- ja ulkoreunan halkaisijat kiihdytysjännitteen  $U_K$  funktiona. Kuvassa 4 näkyy, miten olen määritellyt varjostimella näkyneiden renkaiden halkaisijat. Varjostimelle tuli siis kolme toisistaan erotettavaa valorengasta. Renkaiden halkaisijoiden mittaaminen työntömitalla teki asian hieman hankalaksi, sillä mittaaminen piti suorittaa diffraktioputken lasikuvun ulkopuolella, eikä mistään kulmasta katsottuna renkaiden reunat näyttäneet selvärajaisilta. Laskuissa käytän kuvassa 4 näkyvää kahta ulommaisinta rengasta, joita rajaavat halkaisijat  $r_2$  ja  $r_3$  sekä  $r_4$  ja  $r_5$ .



Kuva 4: Valkoiset renkaat ovat valorenkaita varjostimella

Taulukossa 1 on kummankin renkaan sisä- ja ulkoreunan halkaisijan keskiarvo. Sisimmän renkaan keskiarvon laskin yhtälöllä  $r_s = \frac{r_3+r_2}{2}$  ja uloimman renkaan yhtälöllä  $r_u = \frac{r_5+r_4}{2}$ . Hilavakiolaskuissa käytän vakioiden arvoina taulukon 2 arvoja.

Taulukko 1: Kiihdytysjännite ja sitä vastaavat renkaiden halkaisijat

$U_K$ [V]	$r_s$ [m]	$r_u$ [m]
2000	0,035075	0,061195
2500	0,031595	0,055800
3000	0,028780	0,050940
3500	0,028020	0,047255
4000	0,025375	0,044010
4500	0,023595	0,041735
5000	0,022215	0,038445
5500	0,021270	0,037760
6000	0,021280	0,037215

Taulukko 2: Hilavakion yhtälön vakiokertoimet

Plancin vakio	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js
elektronin varaus	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C
elektronin massa	$m = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
valonnopeus	$c = 299792458$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
grafiittikohtien etäisyys keskipisteestä	$a = 0,074$ m
kaarevuussäde	$R = 0,0660$ m
Maksimin kertaluku	$n = 1$

#### 4.1 Hilavakion määrittäminen graafisesti

Tein Matlabilla funktion, johon sijoitin taulukon 1 kiihdytysjännitteen arvot

$$y = \frac{nh}{\sqrt{\left(\frac{eU}{c}\right)^2 + 2eUm}}, \quad (12)$$

ja toiseen funktioon sijoitin renkaan halkaisijan arvot

$$x = 2 \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{r}{2(a + \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}})}\right)\right). \quad (13)$$

Nyt  $y$ :n ja  $x$ :n muutoksen suhde on sama kuin hilavakio yhtälön 10 mukaisesti

$$d = \frac{nh}{2 \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{r}{2(a + \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}})}\right)\right) \sqrt{\left(\frac{eU}{c}\right)^2 + 2eUm}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (14)$$

Esimerkkinä lasken sisemmälle ympyrälle arvot  $y$ :lle,  $x$ :lle ja  $d$ :lle taulukon 1 ensimmäisen rivin arvoilla, joiden mukaan siis  $U_K = 2000$  V ja  $r_s = 0,035075$  m. Nyt funktio  $y$  saa arvoksi

$$y = \frac{1 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{\left(\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2000 \text{ V}}{299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2 + 2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2000 \text{ V} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \quad (15)$$

$$\approx 2,7397 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Sitten lasketaan  $x$ :n arvo

$$x = 2 \sin \left( \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{0,035075 \text{ m}}{2(0,074 \text{ m} + \sqrt{(0,0660 \text{ m})^2 - \frac{(0,035075 \text{ m})^2}{4}})} \right) \right) \quad (16)$$

$$\approx 0,1267.$$

Lopuksi määritellään vielä  $d$ :n arvo

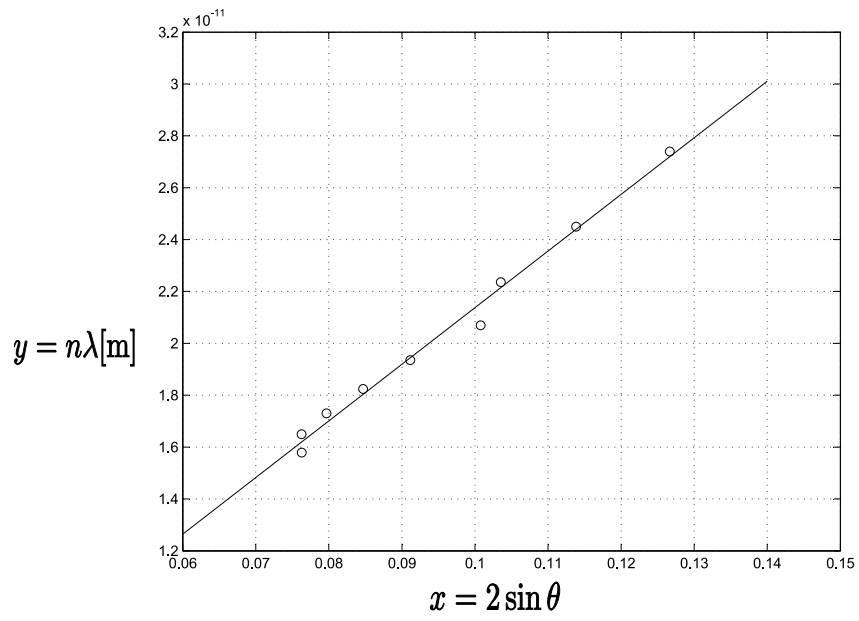
$$d = \frac{y}{x} = \frac{1 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{\left( \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2000 \text{ V}}{299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right)^2 + 2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2000 \text{ V} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}}. \quad (17)$$

$$\frac{1}{2 \sin \left( \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{0,035075 \text{ m}}{2(0,074 \text{ m} + \sqrt{(0,0660 \text{ m})^2 - \frac{(0,035075 \text{ m})^2}{4}})} \right) \right)}$$

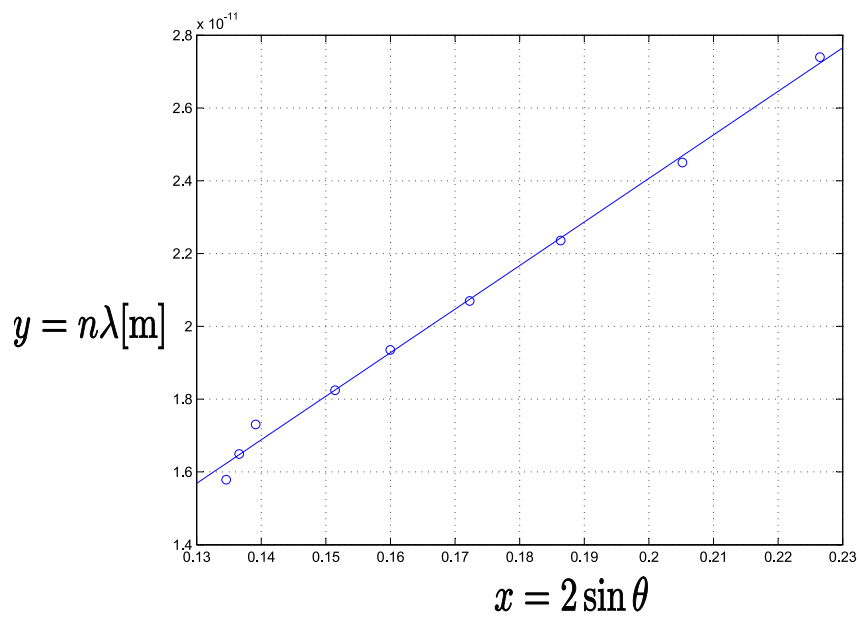
$$\approx 2,1630 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Plottasin matlabilla  $U_K(r_s)$ - ja  $U_K(r_u)$ -kuvaajat. Sisemmän renkaan kuvaaja ja suoransovitus on kuvassa 5 ja uloimman kuvassa 6. Sovitin plottaamilleni pisteille suoran, josta siis saa yhtälön 14 mukaisesti arvot hilavakiolle. Sisemmän renkaan tapauksessa Matlab antoi suoransovituksen, eli hilavakion arvoksi  $d_s = 0,2183 \cdot 10^{-9} \text{ m}$  ja ulomman renkaan tapauksessa  $d_u = 0,1197 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ . Plottauksen jälkeen muokkasin kuvaa Inscape-ohjelmalla.





Kuva 5: Sisempi rengas. Kulmakerroin vastaa hilavakiota  $d_s$ .



Kuva 6: Ulompi rengas. Kulmakerroin vastaa hilavakiota  $d_u$ .

## 4.2 Hilavakion määrittäminen laskennallisesti

Hilavakion saa laskettua yhtälöllä 10. Vaikka työntömitan virhe itsessään on vain 0,01 mm, määrittelen renkaan halkaisijan virheeksi  $\delta r = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$ , koska renkaiden halkaisijan mittaaminen on epätarkkaa renkaiden epäselvien rajojen takia. Kiihdytysjännitteen virheeksi määritän yhden digitin näyttämästä, eli  $\delta U = 10 \text{ V}$ . Virhe lasketaan yhtälöllä 11

$$\delta d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial U} \delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial r} \delta r\right)^2}. \quad (18)$$

Hilavakion ja sen virheen laskut suoritin Matlab-ohjelmalla, koodit ovat liitteessä 2. Käytin laskemisessa taulukon 1 arvoja. Tulokset virheineen ovat sisemmän renkaan tapauksessa taulukossa 3 ja ulommalle renkaalle taulukossa 4.

Taulukko 3: Sisemmän renkaan kiihdytysjännitettä vastaavat hilavakiot virheineen

i	$U_K [\text{V}]$	$d_s [\text{m}]$	$\delta d_s [\text{m}]$
1	2000	$2.1632 \cdot 10^{-10}$	$3.1541 \cdot 10^{-11}$
2	2500	$2.152 \cdot 10^{-10}$	$3.4679 \cdot 10^{-11}$
3	3000	$2.1594 \cdot 10^{-10}$	$3.8081 \cdot 10^{-11}$
4	3500	$2.0538 \cdot 10^{-10}$	$3.717 \cdot 10^{-11}$
5	4000	$2.1236 \cdot 10^{-10}$	$4.2329 \cdot 10^{-11}$
6	4500	$2.1543 \cdot 10^{-10}$	$4.6108 \cdot 10^{-11}$
7	5000	$2.1714 \cdot 10^{-10}$	$4.9305 \cdot 10^{-11}$
8	5500	$2.1626 \cdot 10^{-10}$	$5.1248 \cdot 10^{-11}$
9	6000	$2.0691 \cdot 10^{-10}$	$4.9009 \cdot 10^{-11}$

Sisärenkaan hilavakion keskiarvo on

$$\bar{d}_s = \frac{\sum_i^N d_{si}}{N} = \frac{2.1632 \cdot 10^{-10} + 2.152 \cdot 10^{-10} + \dots}{9} \text{ m} \approx 2,1344 \cdot 10^{-10} \text{ m}. \quad (19)$$

Virheen laskemiseen käytän keskivirheen yhtälöä

$$\begin{aligned} \delta \bar{d}_s &= \sqrt{\frac{\sum_i^N (d_{si} - \bar{d}_s)^2}{N(N-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{((2.1632 - 2,1344) \cdot 10^{-10})^2 + ((2.152 - 2,1344) \cdot 10^{-10})^2 + \dots}{9 \cdot 8}} \text{ m} \\ &\approx 1,4530 \cdot 10^{-12} \text{ m}. \end{aligned} \quad (20)$$

Taulukko 4: Ulomman renkaan kiihdytysjännitettä vastaavat hilavakiot viriheineen

i	$U_K$ [V]	$d_u$ [m]	$\delta d_u$ [m]
1	2000	$1,2097 \cdot 10^{-10}$	$1.066 \cdot 10^{-11}$
2	2500	$1,1940 \cdot 10^{-10}$	$1.1374 \cdot 10^{-11}$
3	3000	$1,1999 \cdot 10^{-10}$	$1.238 \cdot 10^{-11}$
4	3500	$1,2014 \cdot 10^{-10}$	$1.3262 \cdot 10^{-11}$
5	4000	$1,2098 \cdot 10^{-10}$	$1.4253 \cdot 10^{-11}$
6	4500	$1,2048 \cdot 10^{-10}$	$1.4909 \cdot 10^{-11}$
7	5000	$1,2435 \cdot 10^{-10}$	$1.6619 \cdot 10^{-11}$
8	5500	$1,2074 \cdot 10^{-10}$	$1.6413 \cdot 10^{-11}$
9	6000	$1,1731 \cdot 10^{-10}$	$1.6167 \cdot 10^{-11}$

Ulommallekin renkaalle lasken hilavakion keskiarvon

$$\bar{d}_u = \frac{1,2097 \cdot 10^{-10} + 1,1940 \cdot 10^{-10} + \dots}{9} \approx 1,2048 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (21)$$

ja keskiarvon keskivirheen

$$\begin{aligned} \delta \bar{d}_u &= \sqrt{\frac{((1,2097 - 1,2048) \cdot 10^{-10})^2 + ((1,1940 - 1,2048) \cdot 10^{-10})^2 \dots}{9 * 8}} \text{ m} \\ &\approx 6,1357 \cdot 10^{-13} \text{ m.} \end{aligned} \quad (22)$$

Laskennallisella menetelmällä siis saadaan hilavakion lopulliseksi tulokseksi sisemmälle renkaalle  $d_s = \bar{d}_s \pm \delta \bar{d}_s = (2,134 \pm 0,015) \cdot 10^{-10}$  m ja ulommalle renkaalle  $d_u = \bar{d}_u \pm \delta \bar{d}_u = (1,205 \pm 0,006) \cdot 10^{-10}$  m.

## 5 Johtopäätökset

Graafisella määrittelyllä sain hilavakioksi  $d_s = 2,183 \cdot 10^{-10}$  m ja  $d_u = 1,197 \cdot 10^{-10}$  m, jotka eroavat hieman laskennallisesti määritetyistä arvoista  $d_s = (2,134 \pm 0,015) \cdot 10^{-10}$  m ja  $d_u = (1,205 \pm 0,006) \cdot 10^{-10}$  m. Laskennallisessa menetelmässä, jossa laskettiin yksittäisten tulosten avulla hilavakiolle keskiarvo, on sisemmän ja ulomman renkaan erotus suurempi kuin graafisessa menetelmässä määritetty. En osaa sanoa, kumpi menetelmä tässä tapauksessa oli parempi, koska tulokset olivat niin lähellä toisiaan. Mutta jos oletetaan, että grafiittikide on kahdeksankulmioinen, silloin kahden ensimmäisen hilavakion suhde teoriassa on  $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$ . Graafisessa tapauksessa hilavakioiden suhde on  $\frac{d_u}{d_s} = \frac{1,197}{2,183} \approx 0,55$  ja laskennallisesti määritetyssä  $\frac{d_u}{d_s} = \frac{1,205}{2,134} \approx 0,56$ . Kummallakin menetelmällä saatu hilavakion arvojen suhde on hieman teoreettista arvoa pienempi, mutta kuitenkin laskennallisesti saatiin teoreettista arvoa lähmpänä oleva.

Suoransovituksessa tulokseen vaikutti  $\frac{nh}{\sqrt{(\frac{eU}{c})^2 + 2eUm}}$ :n ja  $2 \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{r}{2(a + \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}})}\right)\right)$ :n muutoksen suhde, jolloin systemaattisen virheen vaikutus on pienempi. Silloin, kun on paljon mittauspisteitä, suoransovitus on hyvä menetelmä systemaattisen virheen eliminointiin.

## 6 Liitteet

Liite 1. FysA230/1 Elektronien diffraktio -laboratorioselvitys, jonka liitteenä mittauspöytäkirja

Liite 2. Matlab-koodi hilavakion laskennallisesta määrittämisestä

## Viitteet

[1] Young & Freedman. *University Physics*, 11<sup>th</sup> edition.