

Tiia Monto
tiia.monto@jyu.fi
0407521856

Työ tehty: 18.5.2009

FysA230/3 Potentiaalikuoppa Suppea raportti

Assistentti: Joni Pasanen

Hyväksytty/hylätty:

Työ jätetty:

Abstract

I studied how the Matlab program can calculate numerically the eigenenergies compared to the analytically calculated values. This research includes both cosine potential well and Gaussian potential well, which are approximated with the harmonic oscillator. Additionally the absolute error seemed to be smaller with lowest eigenenergy in both cases.

Sisältö

1	Johdanto	3
2	Teoreettiset lähtökohdat	3
2.1	Harmoninen värähtelijä	3
2.2	Kosinikuoppa	5
2.3	Laserin aiheuttama potentiaali	5
3	Numeeriset menetelmät	5
3.1	Eulerin menetelmä	6
3.2	Matlab-ohjelma	6
4	Havainnot ja laskut	6
4.1	Harmoninen värähtelijä	7
4.2	Kosinikuoppa ja Gaussinen potentiaalikuoppa	8
5	Johtopäätökset	9
6	Huomioita työstä	9

1 Johdanto

Potentiaalikuoppa kuvastaa järjestelmää, jossa hiukkasella on sidottuja tiloja. [2, sivu 88] Tällöin hiukkasen liike on rajoitettu tiettyyn alueeseen ja sillä on kvantittuneet energian arvot.

Tässä työssä tutkin annetun Matlab-ohjelman toimivuutta potentiaalikuoppien energioiden laskemiseksi. Ensin laskin analyttisesti lähtien Schrödingerin yhtälöstä energian arvot harmoniselle värähtelijälle sekä harmonisella värähtelijällä approksimoidulle kosini-kuopalle ja Gaussiselle potentiaalikuopalle. Sen jälkeen katsoin, millaisia energian arvoja Matlab-ohjelma em. kuopille antaa ja vertasin niitä laskemiini arvoihin.

2 Teoreettiset lähtökohdat

2.1 Harmoninen värähtelijä

Johdon harmonisen värähtelijän ominaisenergioille ja aaltofunktiolle olen tehnyt Kari Eskolan luentomonisteen [1] pohjalta.

Stationaarinen Schrödingerin yhtälö on muotoa

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (1)$$

missä siis $\hbar \approx 1,054571 \cdot 10^{-34}$ Js on Planckin vakion johdannainen, m massa, Ψ aaltofunktio, ω kulmataajuus x hiukkasen paikka ja E energia.

Määritellään dimensiomattomat muuttujat $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, $\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$ ja $\Psi(x) = Nu(y)$, jotka sijoitetaan yhtälöön 1

$$-\frac{1}{2}\hbar\omega Nu''(y) + \frac{1}{2}\hbar\omega Nu(y)y^2 = \frac{\epsilon\hbar\omega}{2}Nu(y) \quad (2)$$

$$\Rightarrow u''(y) + (\epsilon - y^2)u'(y) = 0. \quad (3)$$

Sijoitetaan yhtälöön 3 yrite $u(y) = F(y)e^{-\frac{1}{2}y^2}$

$$\frac{d^2}{dx^2}(F(y)e^{-\frac{1}{2}y^2}) + (\epsilon - y^2)F(y)e^{-\frac{1}{2}y^2} = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow F''(y) - 2F'(y) + (\epsilon - 1)F(y) = 0. \quad (5)$$

Ratkaistaan yllä oleva yhtälö Frobeniuksen sarjamenetelmällä käyttämällä yritettä $F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{n+r}$. Nyt siis sijoitetaan yrite ja sen derivaatat yhtälöön 5 ja saadaan

$$\sum_0^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n y^{n+r-2} - \sum_0^{\infty} 2y(n+r)a_n y^{n+r-1} + \sum_0^{\infty} (\epsilon-1)a_n y^{n+r} = 0 \quad (6)$$

$$\sum_0^{\infty} \left((n+r-1)(n+r)a_n y^{n+r-2} - 2(n+r)a_n y^{n+r} + (\epsilon-1)a_n y^{n+r} \right) = 0 \quad (7)$$

Kun $n = 0$, niin ylläolevan yhtälön alin potenssi on y^{r-2} , jonka kertoimesta saadaan $a_0 r(r-1) = 0$. Tästä seuraa, että joko $r = 0$ tai $r = 1$. Valitaan tutkiskelun kohteeksi tapaus $r = 0$ ja saadaan yhtälö 7 muoto

$$\sum_0^{\infty} (n-1) n a_n y^{n-2} + \sum_0^{\infty} (-2n + \epsilon - 1) a_n y^n = 0, \quad (8)$$

josta ensimmäisen termin muuttujenvaihdolla saadaan

$$\sum_0^{\infty} \underbrace{\left((n+1)(n+2)a_{n+2} + (\epsilon - 2n - 1)a_n \right)}_{=0} y^n = 0. \quad (9)$$

Nyt saadaan rekursiorelaatioksi

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\epsilon}{(n+1)(n+2)} a_n. \quad (10)$$

Ratkaisut normittuvat vain, jos sarja katkeaa ja $F(x)$:llä on polynomiratkaisu, eli on olemassa $n_{max} = M$. Nyt saadaan

$$a_{M+2} = \frac{2M+1-\epsilon}{(M+1)(M+2)} = 0 \quad (11)$$

$$\Rightarrow \epsilon = 2M+1. \quad (12)$$

Koska yllä määrittelimme $\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$, jonka sijoittamalla yhtälöön 12 saamme harmonisen oskillaattorin energialle kvantittuneet arvot

$$E_M = \frac{1}{2} \hbar\omega\epsilon = \hbar\omega\left(M + \frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Sijoitetaan energian yhtälö yhtälöön 5

$$F''(y) - 2yF'(y) + 2MF(y) = 0, \quad (14)$$

jonka normittuvat ratkaisut ovat Hermiten polynomeja $F(y) = H_M(y)$. \hat{H} :n ominaisfunktiot, eli stationaarista tilaa kuvaavat aaltofunktiot ovat $\Psi_M(x) = Nu(y) = NH_M(y)e^{-\frac{1}{2}y^2}$. Normitustekijä N voidaan laskea seuraavasti

$$\langle \Psi_N | \Psi_M \rangle = \delta_{NM} \quad (15)$$

$$\Rightarrow |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx H_N^* \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) H_M^* \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} = \delta_{NM} \quad (16)$$

$$|N|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} dy H_N^*(y) H_M^*(y) e^{-y^2} = \delta_{NM}, \quad (17)$$

missä siis $H_N^*(y) H_M^*(y) e^{-y^2} = 2^M \sqrt{\pi} M! \delta_{NM}$, jolloin saadaan normitusvakioksi

$$N = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^M M!}}. \quad (18)$$

2.2 Kosinikuoppa

Tutkittavan kosinikuopan potentiaali on

$$V(x) = \begin{cases} J(1 - \cos(x)), & x \in [-\pi, \pi] \\ \infty, & x \notin [-\pi, \pi], \end{cases}$$

missä J on vakio. Potentiaali on siis kuopan alueella kosinifunktio. Nyt approksimoidaan Taylorin sarjalla kosinia $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ ja sijoitetaan se tutkittavan kosinikuopan potentiaalinyhtälöön:

$$V(x) = \frac{x^2}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (19)$$

Jos ylläoleva potentiaali on sama kuin harmonisen värähtelijän potentiaali, niin

$$V(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{J}{m}}. \quad (20)$$

Harmonisen oskillaattorin energiaksi approksimoitu kosinikuopan energia siis tulee muotoon

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\sqrt{\frac{J}{m}}\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (21)$$

2.3 Laserin aiheuttama potentiaali

Laserin aiheuttama potentiaali voidaan kirjoittaa muodossa

$$V(x) = J\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right). \quad (22)$$

Neperin lukua potensseineen voidaan approksimoida Taylorin sarjalla $e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, joka sijoitetaan laserin aiheuttamaan potentiaaliin

$$V(x) = \frac{x^2}{2}. \quad (23)$$

Approksimoidaan yllä saatua potentiaalia harmonisella oskillaattorilla:

$$V(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{J}{m}}. \quad (24)$$

Nyt ω :n arvo on sama kuin kosinin tapauksessa, joten energiatkin on samoja:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\sqrt{\frac{J}{m}}\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (25)$$

3 Numeeriset menetelmät

Työn ns. kokeellinen osuus oli Matlab-ohjelmalla suoritettu potentiaalienergian laskemista numeerisesti. Matlab-ohjelman laskentamenetelmä perustuu viidennen asteen Runge-Kutta -menetelmään. Kuvaan nyt kuitenkin Euler-menetelmän, joka on samantapainen kuin Runge-Kutta -menetelmä.

3.1 Eulerin menetelmä

Euler-menetelmä on Leonhard Eulerin mukaisesti nimetty tapa, jolla voidaan numeerisesti ratkaista differentiaaliyhtälöitä annetuista alkuarvoista. Eulerin menetelmässä tutkitaan alkuarvo-ongelman ratkaisua. Tiedetään alkupiste $y(x_0) = y_0$ ja derivaatta on

$$y'(x) = f(y, x). \quad (26)$$

Edetään tangenttia myöten tietyn mittainen ”askel”, joka on pituudeltaan $x_n - x_{n-1} = h$. Taylorin sarjan avulla saadaan [3]

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots \quad (27)$$

$$= y(x) + hf(y, x) + \frac{h^2}{2}f(y, x)'(x) + \dots \quad (28)$$

Yllä olevasta yhtälöstä huomioidaan vain pari ensimmäistä termiä ja saadaan

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, x_n). \quad (29)$$

3.2 Matlab-ohjelma

Nyt siis Matlab-ohjelma on tehnyt Schrödingerin yhtälöstä yhtälöparin

$$v'(x) = 2(V(x) - E)u(x) \quad (30)$$

$$u'(x) = v(x), \quad (31)$$

jossa $u(x)$ on aaltofunktio ja $v(x)$ aaltofunktion derivaatta. Ohjelma ratkaisee $u(x)$:ää ja $v(x)$:ää Eulerin menetelmää muistuttavalla viidennen asteen Runge-Kutta -menetelmällä. Alkuarvoina ohjelma käyttää annettuja kuopan reunoja ja se laskee aaltofunktiota vasemmasta reunasta oikealle ja oikeasta reunasta lähtevää vasempaan kohti. Kuopan keskikohdassa se ”liimaa” vasemmalta ja oikealta lähtenyt aaltofunktiota yhteen siten, että liimauskohdassa funktioiden arvot ja derivaatat ovat suunnilleen yhtä suuret. Kun funktiot ovat tarpeeksi lähellä toisiaan, ohjelma tulostaa vastaukseksi ”ans” huomattavan pienen arvon ja kun funktiot eivät kohtaa, ”ans” saa suuren arvon.

Käytännössä siis ohjelmalle syötetään jokin energian arvo ja katsotaan, tulee ohjelman tulostamasta aaltofunktiokuvaajan funktioista yhtenevät, eli ”liimaantuvatko” ne yhteen muodostaen yhden jatkuvasti derivoituvan funktion. Ensimmäinen alkuarvaus on sellainen ominaisenergian arvo, joka on laskettu analyyttisesti ja sen jälkeen arvoa pienennetään/suurennetaan, jos funktiot eivät kohtaa. Kun funktiot kohtaavat, ollaan löydetty ohjelman mielestä oikea ominaisenergian arvo.

4 Havainnot ja laskut

Matlab-ohjelma käytti SI-yksiköiden sijasta arvoja $\hbar = \omega = m = 1$. Ohjelman ajaminen tapahtuu komennolle ”kuoppa(a,b,E)”, missä a on kuopan vasen reuna, b oikea reuna ja E kokeiltava energian arvo. Käytin reunojen arvoina a=-5 ja b=5, jotka siis ovat yhtä kaukana origosta. Ohjelma tulostaa vastauksena lukumäärän ”ans”, lambdaan sekä aaltofunktion, aaltofunktion derivaatan ja potentiaalin kuvaajat.

4.1 Harmoninen värähtelijä

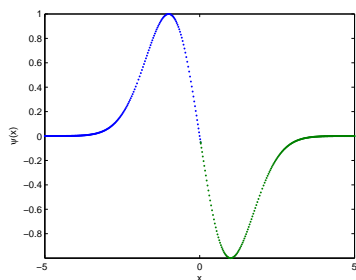
Kun sijoitetaan yhtälöön 13 Matlab-ohjelman käyttämät arvot $\hbar = \omega = m = 1$, niin voidaan laskea teoreettiset energian arvot yhtälöstä $E = (n + \frac{1}{2})$. Teoreettiset ja numeerisesti Matlab-ohjelmalla saadut energian arvot ovat taulukossa 1

Taulukko 1: Matlab-ohjelmaan syötetyt harmonisen värähtelijän energian arvot sekä ohjelman tulostamat arvot λ ja ans

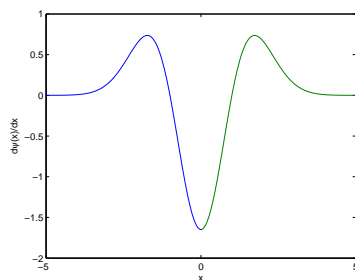
n	E	λ	ans
0	0.5	0.5000	$4.8184 \cdot 10^{-12}$
1	1.5	1.5000	$2.8185 \cdot 10^{-10}$
2	2.5	2.5000	$1.0964 \cdot 10^{-10}$
3	3.5	4.5000	$5.0478 \cdot 10^{-9}$
3	3.5001	3.5001	0.0111
4	4.5	4.5000	$1.6817 \cdot 10^{-10}$

Harmoniselle värähtelijälle ohjelma antoi muutoin samat ominaisenergian arvot kuin mitä sain analyttisesti laskemalla. Poikkeuksena oli, jos alkuarvoksi syötti 3.5000, niin ohjelma tulosti jatkuvasti derivoituvat kuvaajat ja antoi pienen ans:n arvon, mutta tulostikin lambdaaksi arvon 4.5000 eikä 3.5000. Jos alkuarvon muutti arvoksi 3.5001, niin lambdaaksi tuli myös 3.5001, joskin tällöin ans:n arvoksi tuli suuri luku. Tässä kohti siis ohjelmassa lieenee jokin virhe.

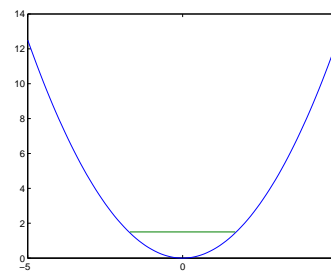
Kuvissa 1-3 näkyy ohjelman tulostamat kuvaajat ominaisenergian arvolla $E = 1,5$. Etenkin kuvasta aaltofunktion derivaatan kuvasta 3 voi huomata derivaatan jatkuvuuden: vasemmalta ja oikealta tulevat funktiot ”liimaantuvat” toisiinsa ja ovat jatkuvia.



Kuva 1: Väli $[-5, 5]$,
 $E=1,5$: aaltofunktio

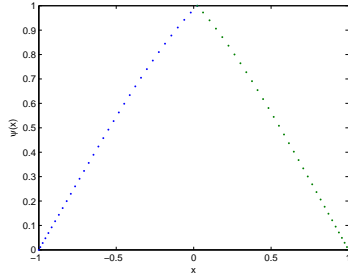


Kuva 2: Väli $[-5, 5]$,
 $E=1,5$: aaltofunktion
derivaatta

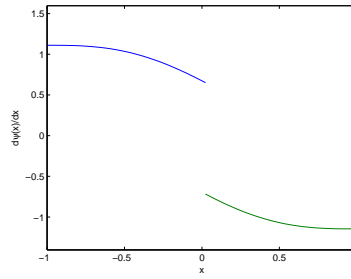


Kuva 3: Väli $[-5, 5]$,
 $E=1,5$: potentiaali

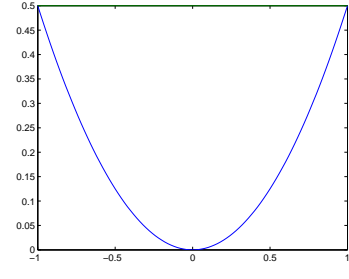
Kokeilin ohjelmaa myös antamalla reunoille arvot $a=-1$ ja $b=1$. Alimman analyttisesti lasketun energian arvolla $E = 0.5$ ohjelma tulosti alla olevat kuvaajat 4-6. Aaltofunktion kuvaaja muodostaa terävän piikin ja aaltofunktion derivaatta ei ole jatkuva, tämä kertoo siitä, että ohjelman mielestä annettu energian arvo ei ole oikea ominaisenergian arvo. Tämä johtuu siitä, että kuopan reunat on liian lähellä toisiaan, jolloin tarkasteluvälille ei mahdu yhtäkään energiatilaa: potentiaalın kuvaajassa ei ole energiaa kuvaavaa vaakasuoraa viivaa.



Kuva 4: Väli: $[-1, 1]$,
 $E=0.5$: aaltofunktio



Kuva 5: Väli: $[-1, 1]$,
 $E=0.5$: aaltofunktion
derivaatta



Kuva 6: Väli: $[-1, 1]$,
 $E=0,5$: potentiaali

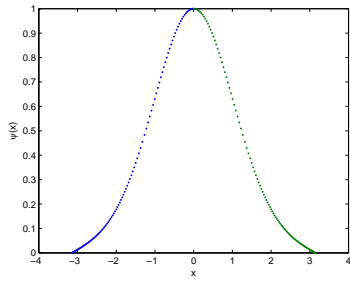
4.2 Kosinikuoppa ja Gaussinen potentiaaliuoppa

Kosinikuopalle käytin tarkasteluväliä $a = -\pi$ ja $b = \pi$, gaussiselle kuopalle $a = -5$ ja $b = 5$. Kosinikuoppaa ja gaussista potentiaaliuoppaa oli approksimoitu harmonisella värähtelijällä luvussa 2.2 ja 2.3. Sijoitetaan analyttisesti laskettuun yhtälöön 21 arvot $\hbar = m = 1$ ja saadaan $E = \sqrt{J}(n + \frac{1}{2})$, joka on siis sama kosinikuopalle ja Gaussiselle potentiaaliuopalle, kuten aiemmin todettiin. J :lle käytetään arvoja 1, 16 ja 100. Sekä analyttisesti (approksimoitu) että numeerisesti lasketut ominaisenergian arvot ovat taulukossa 2. Merkki * lambdan arvon kohdalla tarkoittaa, että kyseinen energia ei mahtunut kuoppaan, vaan potentiaalienergiaa kuvaava viiva jää kuopan yläpuolelle.

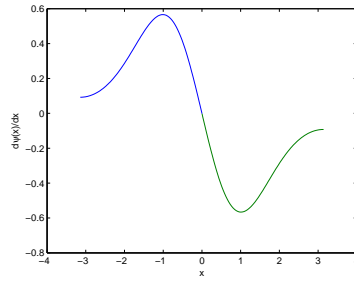
Taulukko 2: Matlab-ohjelmaan syötetyt kosinikuopan ja gaussisen potentiaalilin energian arvot sekä ohjelman tulostamat arvot λ ans ja δ

		Kosini				Gaussinen		
	n	E	λ	ans	δ	λ	ans	δ
J=1	0	0.5	0.4676	$5.9392 \cdot 10^{-12}$	0.0648	0.4063	$7.5841 \cdot 10^{-13}$	0.1874
	1	1.5	1.3434	0.0029	0.1044	0.9906	0.0016	0.3396
	2	2.5	2.1577*	$2.0579 \cdot 10^{-11}$	0.1369	1.2655	$1.4555 \cdot 10^{-10}$	0.4938
	3	3.5	4.1663*	$6.6169 \cdot 10^{-11}$	0.1904	3.1787	$3.0068 \cdot 10^{-10}$	0.0918
J=16	0	2	1.9682	$1.1918 \cdot 10^{-11}$	0.0159	1.9058	$1.8996 \cdot 10^{-11}$	0.0471
	1	6	5.8390	0.0013	0.0268	5.5179	$1.1541 \cdot 10^{-9}$	0.0803
	2	10	9.5744	$1.2207 \cdot 10^{-11}$	0.0426	8.7146	$2.0914 \cdot 10^{-10}$	0.1285
	3	14	16.6035	$2.1904 \cdot 10^{-10}$	0.1860	13.6845	$2.5035 \cdot 10^{-10}$	0.0225
J=100	0	5	4.9686	$1.0134 \cdot 10^{-11}$	0.0063	4.9061	$3.8495 \cdot 10^{-12}$	0.0188
	1	15	14.8419	$1.1746 \cdot 10^{-9}$	0.0105	14.5262	$2.6599 \cdot 10^{-9}$	0.0316
	2	25	24.5866	$1.9076 \cdot 10^{-10}$	0.0165	23.7573	$5.1803 \cdot 10^{-11}$	0.0497
	3	35	34.1998	0.0012	0.0229	32.5889	$2.4669 \cdot 10^{-9}$	0.0689

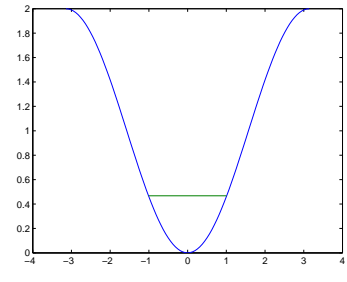
Kuten taulukosta 2 ilmenee, analyttisesti lasketut ominaisenergian arvot eivät vastaa täysin numeerisia arvoja. Tämä johtuu siitä, että harmoninen värähtelijä ei toimi täydellisesti kosinikuopan kuvaamiseen, sillä se on vain approksimaatio. Esimerkkikuvat kosinikuopan tapauksesta ovat kuvissa 7-9, jotka siis vastaavat analyttisesti laskettua energian arvoa $E = 0.5$ ja joissa $J = 1$.



Kuva 7: Väli $[-\pi, \pi]$,
 $J=1$, $E=0.5$: kosinikuopan
aaltofunktio



Kuva 8: Väli $[-\pi, \pi]$,
 $J=1$, $E=0.5$: kosinikuopan
aaltofunktion derivaatta



Kuva 9: Väli $[-\pi, \pi]$,
 $J=1$, $E=0.5$: kosinikuopan
potentiaali

Parametri δ on virhe ja se kertoo numeerisen arvon ja analyttisen arvon erotuksen suhteen analyttiseen arvoon $\delta = \frac{|\lambda - E|}{E}$, eli mitä pienempi arvo sillä on, sitä paremmin numeerinen ja analyttinen arvo vastaavat toisiaan. Kun J :n arvo pysyy samana, kosinikuopan δ :n arvo suurenee energiamäärän suurentuessa. Kun verrataan δ :n arvoja kosinikuopalle J :n kasvaessa, huomataan, että virheen arvo pienenee. Gaussiselle kuopalle on havaittavissa J :n arvon noustessa kaikilla energiatiloilla virheen pienenemistä lukuunottamatta δ :n arvoa ylimmällä energiatilalla, kun $J = 100$.

5 Johtopäätökset

Luvussa 4.1 todettiin Matlabilla ajettavan kuoppa-ohjelman toimivan harmonisen oskillaattorin kuvaamiseen, sillä numeeriset arvot vastasivat täysin analyttisiä arvoja, ohjelma siis näyttäisi toimivan. Varsinaisessa työssä ensin approksimoitiin analyttisesti Gaussinen potentiaalikuoppa ja kosinikuoppa harmoniseksi värähtelijäksi ja sen jälkeen katsottiin, mikä tulos ominaisenergialle saadaan kuoppa-ohjelmalla. Gaussisen ja kosinikuopan tapauksissa virhe δ sai nollaa suurempia arvoja, mikä johtuu analyttisesti tehdyistä approksimaatioista ko. kuopille. Kosinikuopalle analyttinen ominaisenergian arvo vastasi numeerisesti laskettua parhaiten pienillä energian arvoilla ja kun J oli suurimmillaan, virhe pienentyi. Samoin näytti olevan myös Gaussisen kuopan kanssa. Tästä voidaan siis päätellä, että harmoninen värähtelijä on parhaimmillaan, kun kuvataan mahdollisimman matalia energian arvoja mahdollisimman suurilla J :n arvoilla.

6 Huomioita työstä

Työohjeet eivät vastanneet täysin paritehtävän eikä assistentin suullisia ohjeita työstä. Työohjeessa harhaanjohtavasti puhutaan äärettömän syvästä tasapohjaisesta potentiaalikuopasta, vaikka sellaista ei työtä tehdessä tarvinnut käsitellä. Lisäksi työohjeessa kerrotaan, että Numeeriset menetelmät -kappaleessa pitäisi kertoa 4. asteen Runge-Kutta -menetelmästä, vaikka assistentti sanoi suullisesti, että Numeeriset menetelmät -kappaleeseen tulee kertoa Euler-menetelmästä. Työohje kaipaa siis päivitystä.

En tiedä, onko tämä merkityksellistä, mutta ohjelman tulostamassa potentiaalikuoppakuvassa ei ole leabeleita, jotka kertoisivat, mitä vaaka- ja pysty akseli tarkoittavat.

Työstä tulisi olla myös potentiaalkuopan Matlab-ohjelmaan liittyvät (lyhyehköt) käyttöohjeet netissäkin, niin työn voisi tehdä kokonaan itsenäisesti, jos ei tarvitse henkilökohtaista opastusta itse Matlabin käytössä.

Viitteet

- [1] Kari J. Eskola. Luentomoniste: Kvanttimekaniikka 1, fysa230, 7op, Kevät 2009.
- [2] A. C. Phillips. *Introduction to Quantum Mechanics*. Wiley, 2003.
- [3] Helsingin yliopisto. Luentomateriaali: Me107, luento 5: Differentiaalimallin ratkaisu, differentiaaliyhtälön ratkaiseminen.
<http://www.mm.helsinki.fi/mmeko/KURSSIT/ME107/ME107%20Luento%205.pdf>.